

1SL1500 - EDP - Equations aux dérivées partielles

Responsables : **John CAGNOL**

Département de rattachement : **DÉPARTEMENT MATHÉMATIQUES**

Langues d'enseignement : **ANGLAIS , FRANCAIS**

Type de cours : **Cours hors séquence**

Campus où le cours est proposé : **CAMPUS DE PARIS - SACLAY**

Nombre d'heures d'études élèves (HEE) : **50**

Nombre d'heures présentielles d'enseignement (HPE) : **30**

Année académique : **2024-2025**

Niveau avancé : **non**

Présentation, objectifs généraux du cours :

Les équations aux dérivées partielles (ou EDP en abrégé) sont des équations dont les solutions sont des fonctions. Elles apparaissent naturellement dans la modélisation en physique, mécanique, biologie, économie, finance et plus généralement tous les domaines de l'ingénieur.

Dans ce cours, vous apprendrez les bases des EDP. Nous commencerons par un rappel sur les équations différentielles ordinaires (EDO) sur lesquelles nous examinerons le caractère bien-posé des questions. Nous aborderons ensuite les différentes classes d'EDP, notamment elliptiques, paraboliques et hyperboliques. Vous verrez comment on peut prouver l'existence et l'unicité des solutions de certaines équations elliptiques.

Vous verrez comment approcher numériquement les solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques à l'aide de deux techniques standard : La méthode des éléments finis et la méthode des différences finies. Ces deux techniques aboutissent à un système linéaire de très grande taille ; nous verrons donc les bases de l'algèbre linéaire numérique qui permettent de résoudre ce problème. Vous serez également initié à un logiciel de résolution numérique.

Dans ce cours, vous verrez également la théorie des distributions qui généralise le concept de fonctions. Vous apprendrez comment utiliser et les appliquer cette théorie. Vous découvrirez également les espaces de Sobolev qui sont utiles dans le contexte des EDP.

Période(s) du cours (n° de séquence ou hors séquence) :

ST2 et SG3

Prérequis :

- Convergence, Intégration et Probabilités
- Modélisation (co-requis)
- Système d'information et programmation

Plan détaillé du cours (contenu) :

Chapitre I - Equations différentielles ordinaires

Chapitre II - Classification des EDP et modélisation

Chapitre III - Distributions

Chapitre IV - La formulation variationnelle

Chapitre V - La méthode des éléments finis

Chapitre VI - La méthode des différences finies

Chapitre VII - Analyse numérique matricielle

Chapitre VIII - EDP paraboliques

Les chapitres I et V se font sur deux séances chacun.

Le chapitre II se fera via un travail personnel des élèves.

Déroulement, organisation du cours :

Le cours est disponible en :

Français

présentiel (groupes 3 à 6) ou blended learning (groupe 1)

Anglais

blended learning (groupe 2)

La modalité "blended learning" signifie que les cours ont lieu sous forme de capsules vidéos et le TD en présentiel.

Les élèves auquel il apparaît opportun d'apporter une aide complémentaire sont inscrits en MR (renforcement). Ils bénéficient de séances supplémentaires animées par les élèves inscrits dans l'électif de 2e année "Teaching Assistant" sous la responsabilité de l'équipe enseignante. Les renforcements sont compatibles avec le français présentiel et l'anglais "blended learning".

Une modalité dite "maths libres" est pourrait être ouverte pour quelques élèves d'un niveau mathématique exceptionnel et souhaitant approfondir les équations aux dérivées partielles. L'admission est soumise à candidature.

La modalité choisie en CIP et le groupe de cours/TD sont reconduits en EDP sauf motif impérieux. Cette reconduction ne concerne pas la modalité "maths libres".

Organisation de l'évaluation :

L'évaluation est constituée :

- D'un contrôle final CF.
- D'une évaluation obligatoire EO pour :
 - Les élèves en renforcement : ils devront réaliser un mini-projet qui consistera en la collation de leur travail en renforcement.
 - Les élèves qui ne sont pas en renforcement et qui s'inscrivent dans un "projet compagnon" : ils devront alors réaliser un mini-projet dit compagnon.
- D'une épreuve unique de contrôle continu CC, laquelle est composée de plusieurs parties se déroulant à des dates différentes, mais constituant une épreuve unique.

Pour les élèves sans projet compagnon ni renforcement, la note finale sera $\alpha_f \text{ CF} + \alpha_1 \max(\text{CC}, \text{CF})$
où $\alpha_f = 0.7$ et $\alpha_1 = 0.3$

Pour les élèves en renforcement ou avec un projet compagnon, la note finale sera $\alpha_f \text{ CF} + \alpha_o \text{ EO} +$

$$\alpha_1 \max(CC, (\alpha_f CF + \alpha_o EO)/(\alpha_f + \alpha_o))$$

où $\alpha_f = 0.68$, $\alpha_o = 0.12$ et $\alpha_1 = 0.2$

Il est important de préciser que si l'inscription en "projet compagnon" est facultative, ce projet devient obligatoire pour tout élève qui y est inscrit. En particulier, il n'est pas possible de s'en désinscrire et rendre un projet de mauvaise qualité peut faire baisser la note finale.

Moyens :

Cet enseignement est composé de neuf cours et de neuf TD.

Les cours sont donnés dans l'un des groupes de cours ainsi qu'une modalité spéciale appelée "maths libres" dont l'ouverture éventuelle fera l'objet d'une communication spécifique. Chaque groupe de cours est subdivisé en groupes de TD. Une modalité de renforcement est attribuée à certains élèves.

En outre, les élèves qui ont à traiter un problème de modélisation conduisant à une EDP dans le cadre d'un projet, d'une ST, d'une activité associative ou d'un intérêt personnel, peuvent demander à bénéficier d'un projet compagnon. Il s'agit de la réalisation d'un travail supplémentaire. Ce travail est facultatif et soumis à candidature. Il est placé sous la responsabilité de Lionel Gabet.

Acquis d'apprentissage visés dans le cours :

Description des compétences acquises à l'issue du cours :

For all : C1, C2, C6

For students involved in a companion project: additionally C4, C7

Bibliographie :

Erick Herbin & Pauline Lafitte
CIP and PDE Lecture Notes

Haïm Brézis
Analyse fonctionnelle - Théorie et applications: Théorie et applications
Dunod, 2020 (dernière version) ou toute autre version antérieure

Grégoire Allaire
Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique
Ellipses, 2005