3MD2050 - Analyse mathématique de problèmes de bords irréguliers et fractals issus de la physique

Responsables : **Pauline LAFITTE , Anna ROZANOVA-PIERRAT**

Nombre d’heures d’études élèves (HEE) : **40**

Nombre d’heures présentielles d’enseignement (HPE) : **24**

Année académique : **2024-2025**

Présentation, objectifs généraux du cours :

Dans le monde actuel on a besoin de faire face aux problèmes qui contiennent des géométries complexes, très irrégulières, dont une
modélisation la plus simple fait apparaître des bords ou géométries pré-fractales ou fractales (des fissures des matériaux, les côtes du Royaume Unies, les électrodes, les poumons, les tumeurs cancéreuses, les murs anti-bruits acoustiques, ...). Cet axe de la modélisation des surfaces (en 3D) ou des longueurs (en 2D) infinies de domaines au volume fini et aux mesures de dimension fractionnaire des bords par des fractales s’est beaucoup développé récemment depuis la publication du livre de B. Mandelbrot «The fractal geometry of nature» en 1982.

Suivant l’application et la nature du phénomène étudié (on pourrait citer deux exemples typiques: la propagation de la chaleur si on vise le refroidissement des microprocesseurs par exemple, ou encore la propagation des ondes pour le problème d’absorption des ondes le plus efficace) le modèle mathématique (dans le premier cas l’équation de la chaleur et dans le deuxième cas l’équation d’onde ou de Helmholtz en fréquentiel) est différent mais il hérite les propriétés connues pour l’équation de Poisson, ou même tout simplement les propriétés du Laplacien, dans des domaines aux bords fractals.
Le cours propose donc l’étude détaillée des problèmes elliptiques sur les domaines à bords fractals qui se généralisent en une notion de d-ensembles (donc des ensembles de dimension d qui est un nombre réel). Les résultats présentés dans ce cours se sont développés à partir des années 80 du siècle dernier et sont à la base de nombreuses questions ouvertes des mathématiques appliquées actuelles qui se développent de plus en plus pour répondre à la demande des applications physiques, médicales et en ingénierie.

Période(s) du cours (n° de séquence ou hors séquence) :

SM10

Prérequis :

Cours d'EDP 1A

Plan détaillé du cours (contenu) :

On étudie en détail les espaces de Sobolev et leurs propriétés.

On traite l’équation de Poisson sur des domaines non convexes (avec un coin entrant dans une boule par exemple) et on étudie la régularité de la solution faible.

On présente ensuite la notion de d-ensemble et de d-mesure en donnant des exemples typiques des bords fractals, comme les fractales de Von Koch.

On définit des aspects d’analyse fonctionnelle pour trouver la solution de
l’équation de Poisson sur un domaine à bord fractal :
1) l’existence d’un opérateur d’extension continu qui permet de prolonger les fonctions sans perte de leur régularité, à savoir, l’appartenance à un espace de Sobolev
2) l’introduction de l’opérateur de trace pour les distributions régulières, l’étude de sa compacité
3) la formule de Green et l’intégration par parties sur les domaines avec des bords donnés par des supports des mesures de Borel à dimension finie
On étudiera ensuite le problème de Poisson pour différents cas de conditions au bord et on regardera l’apport de la géométrie irrégulière dans le problème spectral associé à Laplacien. On établira pour un domaine borné à bord fractal l’existence d’une suite de valeurs propres et d’une base orthonormée de modes propres. On étudiera le phénomène de localisation des modes propres.
On appliquera la méthode de Galerkin pour montrer le caractère bien posé de l'équation de chaleur sur le même type des domaines irréguliers. On étudiera la convergence des domaines et des solutions corréspondantes (convergence de Mosco).

Déroulement, organisation du cours :

Cours magistral au tableau, 4 TD d'une heure.

Organisation de l'évaluation :

Examen écrit de 3h.

Moyens :

Equipe pédagogique : Anna Rozanova-Pierrat (CentraleSupélec)

Acquis d'apprentissage visés dans le cours :

Bord reguliers et irréguliers : influence sur des solutions des EDPs; domaines d'extension de Sobolev; l'opérateur de trace sur un bord multi-fractal, formules de Green sur des bords irréguliers; les compacts et les opérateurs compacts; convergence faible et faible*; espaces de Sobolev; problèmes spectrales et méthode de Galerkin; localisation des fonctions propres du Laplacien; convergence des domaines (Hausdorff, en fonctions caractéristiques); convergence de Mosco et gamma-convergence (approximation des solutions sur des bords irreguliers par des solutions sur des domaines à bords reguliers).

Description des compétences acquises à l'issue du cours :

This theoretical course in the themes of PDEs, functional analysis and modeling aims to be of interest to those who wish to do research in the field of applied mathematics, as well as in the context of R&D, given the application to engineering problems that the theory of this course will help to solve.

Bibliographie :

[1] B. Mandelbrot. The fractal geometry of nature,
Cover of the hardcover edition, 1982.

[2] L. C. Evans. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics, 1994.
[3] K.J. Falconer. Techniques in Fractal Geometry. Chichester: John Wiley, 1997.
[4] Barlow, M.T., Kigami, J.: Localized eigenfunctions of the Laplacian on p.c.f. self-similar sets. J. London. Math. Soc.(2) 56, 320–332 (1997)
[5] A. Jonsson and H. Wallin, Boundary value problems and brownian motion on fractals, Chaos, Solitons & Fractals, 8 (1997), 191–205.
[6] K. Arfi, A. Rozanova-Pierrat, Dirichlet-to-Neumann or Poincaré-Steklov operator on fractals described by d-sets. DCDS - S, 12 (2019), 1-26
[7] M. Filoche, S. Mayboroda. Universal mechanism for Anderson and weak localization. PNAS, 109 (2012), 14761–14766.