

3MD2210 - Théorèmes limites

Responsables : **Pauline LAFITTE , Alexandre RICHARD**

Langues d'enseignement : **FRANCAIS**

Campus où le cours est proposé : **CAMPUS DE PARIS - SACLAY**

Nombre d'heures d'études élèves (HEE) : **40**

Nombre d'heures présentielles d'enseignement (HPE) : **24**

Année académique : **2024-2025**

Niveau avancé : **non**

Présentation, objectifs généraux du cours :

En sciences, et en physique particulièrement (mais aussi en biologie, systèmes complexes, etc.), on cherche à obtenir des équations (EDO, EDP(S), etc.) décrivant des phénomènes macroscopiques à partir de propriétés observées telles que des lois de conservation ou encore la propagation d'ondes. Or bien souvent, ces équations macroscopiques représentent une approximation aux grandes échelles de systèmes microscopiques composés de grands nombres de particules interagissant selon des principes physiques élémentaires, par exemple des atomes/molécules en physique ; des neurones/canaux ioniques en neurosciences ; des agents en économie, etc. Déduire de ces systèmes microscopiques des lois macroscopiques représente bien souvent un problème aussi fondamental que difficile.

L'objectif de ce cours sera de présenter certains outils mathématiques de convergence de variables aléatoires, et de les appliquer à des systèmes de particules probabilistes en interaction dont le nombre de composantes tend vers l'infini. A la limite, on identifiera selon les exemples des équations de la mécanique des fluides ou de la biologie.

Période(s) du cours (n° de séquence ou hors séquence) :

SM10

Prérequis :

Chaînes de Markov et martingales à temps discret ; Calcul stochastique.

Plan détaillé du cours (contenu) :

I Introduction et exemples clés

II Théorèmes limites

- Tension des mesures dans les espaces métriques
- Convergence en distribution et théorème de Prokhorov
- Tension dans l'espace des fonctions continues et Théorème de Donsker

III Théorie d'approximation de diffusions de Stroock-Varadhan

- Rappels sur les EDS
- Solutions faibles et problèmes de martingale
- Approximation de diffusions

IV Systèmes de particules diffusives en interaction et propagation du chaos

- Limite champ moyen de systèmes à coefficients réguliers
- EDS de McKean-Vlasov et propagation du chaos

Déroulement, organisation du cours :

Cours magistral, ponctué d'exercices à chercher à la maison.

Organisation de l'évaluation :

Un devoir maison et un contrôle final écrit de 3h.

Moyens :

Equipe pédagogique : Alexandre Richard (CentraleSupélec)

Acquis d'apprentissage visés dans le cours :

Les théorèmes limites classiques, et notamment le théorème de Donsker ;
Quelques éléments de théorie des équations aux différentielles stochastiques, solutions fortes et faibles;
Problèmes de martingales;
Approximation de diffusion à la Stroock-Varadhan;
Approximation particulière et représentation probabiliste d'EDP, propagation du chaos.

Description des compétences acquises à l'issue du cours

:

Mastering the convergence of random variables in certain functional spaces by tightness methods ;
Students will master the concepts of approximation and scaling limits.

Bibliographie :

- * P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, Wiley, 1999.
- * R. Durrett, Stochastic calculus, a practical introduction, CRC, 1996.
- * A.-S. Sznitman, Topics in propagation of chaos, St-Flour Lecture Notes, 1988.
- * Divers articles de recherche récents dont les références seront fournies au fur et à mesure.